國立臺北科技大學九十六學年度碩士班招生考試

系所組別：1310、1320、1330 車輛工程系碩士班甲、乙、丙組

第二節 工程數學　試題

注意事項：
1. 本試題共三題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

一、(14%)圖 1 為彈簧-質量系統，質量 M 在完全光滑的表面上運動。當彈簧伸長量為零時，質量的位移 y 定義為零。初始時(時間 t=0)，質量的位移及速度均為零且開始受 1N 外力的作用。由力學分析，可得此系統的微分方程式 $\ddot{y}(t)+y(t)=1$ 及初始條件 $\dot{y}(0)=y(0)=0$。

1. (8%)求 $y(t)$
2. (3%)求 $y(t)$ 的最大值
3. (3%)質量的初始位移由零改為 0.5m，其餘條件不變，求 $y(t)$ 的最大值

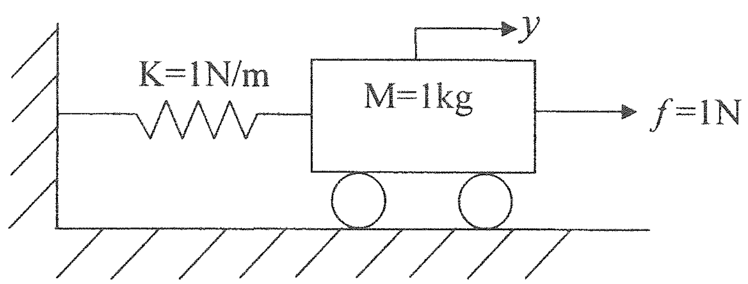

圖 1

二、(36%)圖 2(a)為電阻-電容電路，初始時(即時間 t=0)，電容電壓為 1V，開關接通 A 點。開關接通 A 點 1 秒後切換至 B 點，再隔 1 秒自 B 點切換至 A 點，並如此持續進行切換。利用數位示波器記錄輸入電壓 x 及電容電壓 y，得到圖 2(b) 的波形。由電路分析，可得此系統的微分方程式 $\dot{y}(t)+y(t)=x(t)$ 及初始條件 $y(0)=1$。請依照下列步驟，求穩態時(即 $t\to\infty$)，電容電壓的最大值。

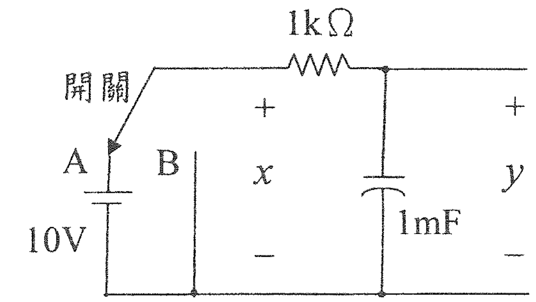

圖 2(a)

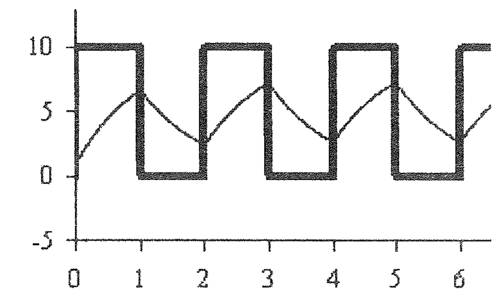

圖 2(b)

1. (6%)由 Laplace transform 的定義 $L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ 及 unit step 的定義 $u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$，證明 $L\left[u(t-a)\right]=\dfrac{e^{-as}}{s}$
2. (6%)將輸入電壓以 unit step 表示，並求 $L\left[x(t)\right]$
3. (6%)利用定理 $L\left[\dot{y}(t)\right]=sL\left[y(t)\right]-y(0)$，求 $L\left[y(t)\right]$
4. (6%)利用 inverse Laplace transform $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right]=e^{-t}$ 及

   $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-as}}{s(s+1)}\right]=(1-e^{-(t-a)})u(t-a)$，求 $y(t)$
5. (6%)利用等比級數和 $a+ar+ar^2+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$，求穩態的電容電壓最大值
6. (6%)初始的電容電壓由 1V 改為 2V，其餘條件不變，請問穩態的電容電壓最大值會變大、不變或變小？請說明理由

注意：背面尚有試題

三、(50%)一半徑為$\sqrt{2}$的球，球心 O 點的座標為(0,0,0)　。取空間上與球面重合的 A 及 B 兩點，其中 A 點的座標為(1,0,-1)　，B 點的座標為(-1,1,0)　。圖 3 中的平面 E 為包含 O、A、B 三點的平面，Z 軸為平面 E 的法線(normal line)　，α 為 $\angle$AOB　，X 軸為 $\angle$AOB 的角平分線並與 Z 軸垂直，X、Y、Z 三軸構成一直角座標系統 XYZ。回答下列有關此球繞著 Z 軸旋轉時，球面上一點由 A 至 B 的路徑及座標轉換的問題。

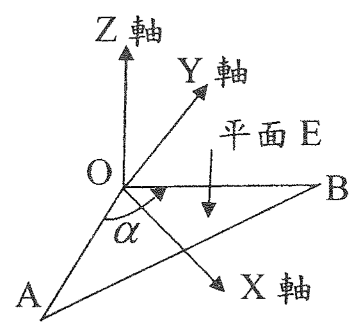

圖 3

1. (8%)由餘弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$，其中 a、b、c 為三角形各邊長，θ 為 a、b 兩邊的夾角，證明 $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{F} \bullet \vec{G}}{\|\vec{F}\|\|\vec{G}\|}$，其中 θ 為 $\vec{F}$ 及 $\vec{G}$ 的夾角，$\|\ \|$為向量長度
2. (4%)求 $\cos(\alpha)$ 及 $\sin(\alpha)$
3. (4%)球面上一點由 A 沿球面曲線至 B 的最短路徑為：此球繞著 Z 軸旋轉時，此點由 A 至 B 的路徑。求此路徑的長度
4. (6%)求 Z 軸的單位向量(u_Z, v_Z, w_Z)及平面 E 的方程式
5. (8%)求 X 軸的單位向量(u_X, v_X, w_X)及 Y 軸的單位向量(u_Y, v_Y, w_Y)
6. (8%)A 點在原座標系統與 XYZ 座標系統的座標分別為(x_A, y_A, z_A)及(X_A, Y_A, Z_A)，求轉換矩陣 T 及其反矩陣 T^{-1}，使得 $\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$。請以 X、Y、Z 三軸單位向量的分量表示，其符號在 4.及 5.小題中
7. (6%)A、B 兩點在 XYZ 座標系統的座標分別為(X_A, Y_A, Z_A),(X_B, Y_B, Z_B)，求轉換矩陣 R，使得 $\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$。請以 $\cos(\alpha)$ 及 $\sin(\alpha)$ 表示
8. (6%)A、B 兩點在原座標系統的座標分別為(x_A, y_A, z_A),(x_B, y_B, z_B)，求轉換矩陣 S，使得 $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$。請以 6.及 7.小題的 T、T^{-1} 及 R 表示