

國立臺北科技大學九十六學年度碩士班招生考試

系所組別：1111、1112、1120 機電整合研究所甲、乙組

第一節 工程數學 試題

第一頁 共一頁

注意事項：

1. 本試題共 8 大題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

1. (1) 一物體的溫度變化速率與其本身溫度 T 和周圍溫度 T_0 的差成正比，試寫出其微分方程式，並求其通解。(5%)

(2) 一溫度計置入定溫溶液作溫度量測前，溫度計讀數為 21°C ，當置入溶液後 0.5 分鐘時，溫度計顯示讀數為 43°C ，再至 1 分鐘時，溫度計顯示讀數為 63°C ，試問該溶液溫度究竟幾 $^\circ\text{C}$ ？(10%)

2. Find the general solution $y(x)$ of equation $\frac{1}{2}x^3y'' - xy = 1$ with $x > 0$. (10%)

3. 已知函數 $f(t)$ 的 Laplace transform 為 $F(s) = \left(\frac{e^{-s} - 1}{s}\right)^2 e^{-s}$ ，試

(1) 求 $f(t)$ 。(10%)

(2) 繪出 $f(t)$ 的圖形。(5%)

4. Use Gauss-Jordan elimination to solve $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$. (10%)

5. Solve the initial-valued problem $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (10%)

6. (1) 已知 $x^2 + y^2 + z^2 = 6x - 8z$ 為球(sphere)方程式，試求出其球心座標 (x, y, z) 值及球半徑 R 值。(5%)

(2) 試求 $\oint_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$ ，其中 C 為平面方程式 $z = 2 - y$ 與球方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 6x - 8z$ 相交而得之封閉曲線。[Hint: use Stokes' theorem] (10%)

7. 函數 $f(x) = 1 + 2\sin(-2x) + 3\cos(5x)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ，試將 $f(x)$ 展開成 Fourier series。(10%)

8. 長度 L 、張力 T 、單位長度的質量為 ρ 之細繩沿 x 軸向設置於 $[0, L]$ 區間，左端固定，右端隨時間 t 依 $\sin(\pi t)$ 進行橫向(transverse)移動，細繩由靜止釋放，初始位移分佈為 $f(x)$ 。當 $t > 0$ ，橫向運動受到與瞬時速度成正比的阻尼力(damping force)作用。

(1) 試寫出橫向位移為 $u(x, t)$ 邊界值問題完整的運動方程式、邊界條件及初始條件。(不必推導) (10%)

(2) 若本題 $u(x, t)$ 的 eigenfunctions 為 $\sin(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ，試簡述其物理意義。(不必解出微分方程式) (5%)

※注意: 本題為典型的 wave equation of vibrating string，作答時不必過程推導，也不必解出微分方程式。