

國立臺北科技大學九十六學年度碩士班招生考試

系所組別：1901、1902 光電工程系碩士班

第一節 工程數學 試題

第一頁 共一頁

注意事項：

1. 本試題共八題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

一、[10%]

請寫出下列積分、函數或轉換的值：

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi) \cos t dt$  ,

2.  $P_2(1)$  ,

3.  $\Gamma(3)$  ,

4.  $(1 * t) * 1$  ,

5.  $L(U(t))$  .

其中  $\delta$  為單位脈衝函數(Unit impulse function)、 $P_n(x)$  為雷建德多項式(Legendre polynomial)、 $\Gamma(x)$  為伽瑪函數(Gamma function)、 $f * g$  為  $f$  與  $g$  之迴旋積分(Convolution)、 $L(U(t))$  為單位步階函數(Unit step function)之拉普拉斯轉換(Laplace transform)。

二、[10%]

若  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$  ,

1. 請以傅利葉積分(Fourier integral)表達  $f(x)$  ,

2. 請證明  $\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$  .

三、[15%]

設  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  , 求  $A^{25}$  .

四、[15%]

請解下列微分方程式之通解

$x^3 y^{(3)} - x^2 y'' - 7xy' + 16y = 9x$  .

五、[10%]

解  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ;  $u(0,t) = u(2,t) = 0$ ,  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ ,  $u(x,0) = x$  .

六、[15%]

1. [10%] 解  $\iint_S (x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}) \cdot d\bar{A}$  , 其中  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$  . 及

2. [5%] 用子題 1 的結果證明散度定理(divergence theorem)。

七、[10%]

使用留數定理(residue theorem)求下列之積分式的 Cauchy principal value

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2 + 4x + 5} dx$

八、[15%]

令  $m$  和  $n$  為整數，其中  $0 \leq m < n$  . 證明

$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{2n} \csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$