國立臺北科技大學九十五學年度碩士班招生考試

系所組別：1901、1902 光電工程系碩士班不分組

第一節 工程數學 試題

填准考證號碼

注意事項：

1. 本試題共六題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

一、

已知微分方程式 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y=0$。請問 (1) 下列函數中何者為該微分方程式之解：$y_1(x)=e^x$、$y_2(x)=e^{-x}$、$y_3(x)=xe^x$、$y_4(x)=xe^{-x}$、$y_5(x)=3e^x-e^{-x}$、

$y_6(x)=e^x+2xe^x$、$y_7(x)=e^x-2xe^{-x}$、$y_8(x)=x^2e^{-x}$、$y_9(x)=e^{-x}+2x^2e^{-x}$；

(2) 請問該微分方程式之通解可否寫成 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_5y_5(x)$？為甚麼？
其中 c_1、c_2、及 c_5 為常係數。

(10% ；其中(1)小題每選錯一個倒扣一分)

二、

請解微分方程式 $\ddot{y}+y=4\delta(t-\pi)$；
其中初始條件為 $y(0)=\dot{y}(0)=0$ 且 $\delta(t)$ 為單位脈衝函數(Unit impulse function 或 Dirac delta function) 。(20%)

三、

請求微分方程式 $y''-(1+x)y=0$ 之前五項冪級數解；
其中初始條件為 $y(0)=1$ 及 $y'(0)=0$。(20%)

四、

(1) 於區間 $0 \le x < 2\pi$ 中，函數 $f(x)$ 有如下的定義。請將週期為 2π 的函數 $f(x)$ 展開成富利葉(Fourier)級數。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \pi - x & (0 < x < 2\pi) \end{cases}$$

(2) 於週期為 2π 而區間為連續的函數 $g(x)$，其富利葉(Fourier)級數可表示為

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

利用(1)的結果，證明下列二個關係式

(a) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)(\pi - x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x+t)(\pi - x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k \cos kt - a_k \sin kt}{k}$

(24%, (1)佔 8%，(2) (a)(b)各佔 8%)

五、

若是矩陣 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

利用 Cayley-Hamilton 理論，計算(1) A^4 (2) A^{-2}

(16%, 各小題分佔 8%)

六、

假設 α, β, γ 為三個相異的複數，在複數平面表示此三點為 A,B,C 時

試證明使三角形 ΔABC 為正三角形的充要條件為

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$$

(10%)