國立臺北科技大學

九十三學年度光電工程系碩士班入學考試

工程數學試題

填准考證號碼　　　　　　　　　　　　　　第一頁　共一頁

注意事項：

1. 本試題共四大題，配分共 100 分。
2. 請按順序標明題號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須答在答案卷之答案欄內，否則不予計分。

1. 下列 10 小題,只要寫出答案即可,不要寫出過程.(60%)

(1) 在放射性同位素衰變中,已知放射性物質之質量變化率和殘留質量之大小成正比.若某一放射性同位素,放置 10 年後發現,殘留質量爲原有質量之 9/10.則此物質之半衰期多久?(取三位有效數字).

(2) 二階線性微分方程式 $x^2y'' + 3y' + 2y = x$,試任求一解.

(3) 求解 $y'' + (y')^2 = 0$, y(0)=1.

(4) 已知 F(s)= $\dfrac{s+2}{s^2 - s + 1}e^{-3s}$, 求反拉氏轉換(inverse Laplace transform) f(t).

(5) 圓錐面 $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$,求在圓錐面上一點 P(1,0,2)之切平面方程式(tangent plane).

(6) 4x4 之矩陣 A= $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, 求其反矩陣(inverse) A^{-1}.

(7) 畫出 y=H(t-1) $e^{-(t-1)}\cos(t-1)$ 之圖形.H(t-a)爲 Heaviside 函數. (標出重要點之數據)

(8) f(x)= $2x^3 - x + 1$, $-2 \le x \le 2$

函數 f(x)可以傅立葉級數(Fourier series)表示爲

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{2}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{2}),\quad 求\ \ a_3 = ?$$

(9) 求解 $\sin(z) = i$

(10)求 27 之立方根.

2. 說明移位 delta 函數(shifted delta function) $\delta(t-a)$ 之定義及物理意義,
   並證明其拉氏轉換爲 e^{-as}. (10%)

3. 試以流體流動爲例,說明高斯散度定理(Gauss divergence theorem)之物理意義.

$$\iint_{\Sigma} F \cdot N d\sigma = \iiint_{M} \nabla \cdot F dV$$

   若向量場 $\mathbf{F} = x^2 i + j + 2k$, Σ 爲(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)等四點所圍成
   三角錐之四個平面,試驗證高斯散度定理. (20%)

4. 如圖半圓板之溫度分佈問題,可寫成如下之邊界值問題.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \; 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = u_0 \qquad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r,0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \qquad 0 < r < c$$

   求此半圓板在穩態(steady-state)之溫度分佈 $u(r, \theta)$. (10%)