

國立臺北科技大學

九十二學年度自動化科技研究所入學考試

工程數學（乙組）試題

填准考證號碼

第一頁 共一頁

--	--	--	--	--	--	--	--

注意事項：

1. 本試題共 **六** 題，配分共 100 分。
2. 請按順序標明題號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須答在答案卷之答案欄內，否則不予計分。
4. 第三～六題，計算過程必須完整才給分。

1. (20%) 是非題：每小題答錯倒扣 5 分，倒扣至本題 0 分為止。

- (1) 若兩矩陣為 similar matrix，則其 eigenvalue 必相同。
- (2) 所有的 subspace 均包含零向量。
- (3) 向量 A 與 B 為 linear dependent，向量 B 與 C 為 linear dependent，則向量 A 與 C 必為 linear dependent。
- (4) $S = \{B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid AB = BA, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ ，則 S 為 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 之 subspace。

2. (10%) 解釋下列畫底線名詞：

- (1) nullspace of a matrix A
- (2) rank of a matrix A

3. (20%) Let $A = \begin{bmatrix} 0.7167 & 0.2167 & 0.0667 \\ 0.2167 & 0.7167 & 0.0667 \\ 0.0667 & 0.0667 & 0.8667 \end{bmatrix}$, find $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = ?$

4. (10%) Determine the column spaces of the following matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

5. (20%) Let T be the linear operator on \mathbb{R}^3 defined by

$$T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x).$$

(1) Find the matrix of T in the basis

$$\{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}.$$

(2) Verify that $[T]_f [v]_f = [T(v)]_f$ for any vector $v \in \mathbb{R}^3$.

6. (20%) For each matrix, find all eigenvalues and a basis of each eigenspace:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2) B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Which matrix can be diagonalized, and why?