115ME02

國立臺北科技大學115學年度碩士班招生考試

系所組別：1120 機械工程系機電整合碩士班乙組

第一節　工程數學　試題

注意事項：

1. 本試題共五題，每題20分，共100分。
2. 不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

一、試求下列微分方程式之一般解:

(一)　$x^2y''-xy'+y=0,\quad y(1)=2,\ y'(1)=1$ (10分)

(二)　$-2xydx+(3x^2-y^2)dy=0$ 　(10分)

二、試利用拉氏轉換求解下列問題:

(一)　$F(s)=\ln\frac{s+2}{s+3}$ 　若 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, 試求出 $f(t)$ (10分)

(二)　$F(s)=e^{-3s}/(s+1)^3$ 　若 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, 試求出 $f(t)$ (10分)

三、若 $A=\begin{bmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{bmatrix}$，試求解下列問題:

(一)　試求矩陣 A 之特徵值與特徵向量 (10分)

(二)　試將矩陣 A 對角化 (5分)

(三)　試求矩陣 A^{30} (5分)

四、試求下列各小題:

(一)　若向量$\mathbf{F}=(e^x siny)\mathbf{i}+(cosy+xz)\mathbf{j}+(z^2xy)\mathbf{k}$，試求:

1. $\nabla\cdot\mathbf{F}$ (4分)
2. $\nabla\times\mathbf{F}$ (4分)

(二)　若$\varphi(x,y,z)=xcos(x+y+z)$，請證明$\nabla\times(\nabla\varphi)=\mathbf{0}$ (4分)。

[備註:若無詳細計算過程，則不予計分。]

(三)　將函數 $f(x)=x$，在範圍 $0<x<2$ 內展開為半幅(Half-range)正弦級數(Sine series) (8分)。

[備註:請列出級數前三項即可。]

五、試求下列偏微分方程式之解:

(一) 一維波動方程式 (10分):

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0<x<L,\ t>0$$

邊界條件為:

$$u(0,t)=0,\qquad u(L,t)=0\quad for\ t>0$$

初始條件為:

$$u(x,0)=f(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x)\quad for\ 0<x<L$$

(二) 二維熱傳導方程式 (10分):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ 0<x<1,\ 0<y<1,\ t>0$$

邊界條件為:

$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=0\quad for\ 0<x<1, t>0$$
$$u(0,y,t)=u(1,y,t)=0\quad for\ 0<y<1, t>0$$

初始條件為:

$$u(x,y,0)=f(x,y)=x(1-x^2)y(1-y)$$