

國立臺北科技大學 103 學年度碩士班招生考試

系所組別：3110、3120、3150

土木工程系土木與防災碩士班甲、乙、戊組

第三節 工程數學 試題

第一頁 共一頁

注意事項：

1. 本試題共 6 題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

1. 求解下列微分方程式(每題 10%共 40%)

(a) $xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$

(b) $y'' + 4y = g(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, 其中 $g(x) = \begin{cases} \sin x; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0; x > \pi/2 \end{cases}$

(c) $x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$

(d) $y'' + 2y(y')^3 = 0$

2. 常係數微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ ，一般求解過程為令 $y = e^{mx}$ 代入微分方程後得特徵方程式 $m^2 + am + bm = 0$ ，求得特徵方程之根 $m = m_1$ ， m_2 後即可得通解

$y_h = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ ， c_1 與 c_2 為任意常數。當特徵方程式之根為重根時 $m_1 = m_2$ ，證明

$$y_2 = \left. \frac{\partial y(x, m)}{\partial m} \right|_{m=m_1} \text{ 為微分方程之另一組解} \quad (10\%)$$

3. 利用 Laplace 轉換求解下列聯立微分方程 (10%)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} &= t^2 & x(0) &= 8, \quad y(0) = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} &= 4t & x'(0) &= 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

4. 求面積分 $I = \iint_S \frac{z}{xy} dS$; 其中 S 為 $z = x^2$ 於第一卦限內由 $y=1, y=3, z=1$ 及 $z=4$ 所圍之曲面 (15%)

5. 求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 0 \\ 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ 之特徵值與對應之特徵向量，其特徵向量是否互為正交？

(15%)

6. 已知二階方陣 A 之特徵值為 $\lambda_1 = 1$ 與 $\lambda_2 = 4$ ，對應之特徵向量為 $x_1 = [3 \ 1]^T$ ， $x_2 = [2 \ 1]^T$ ，試求 A=? (10%)